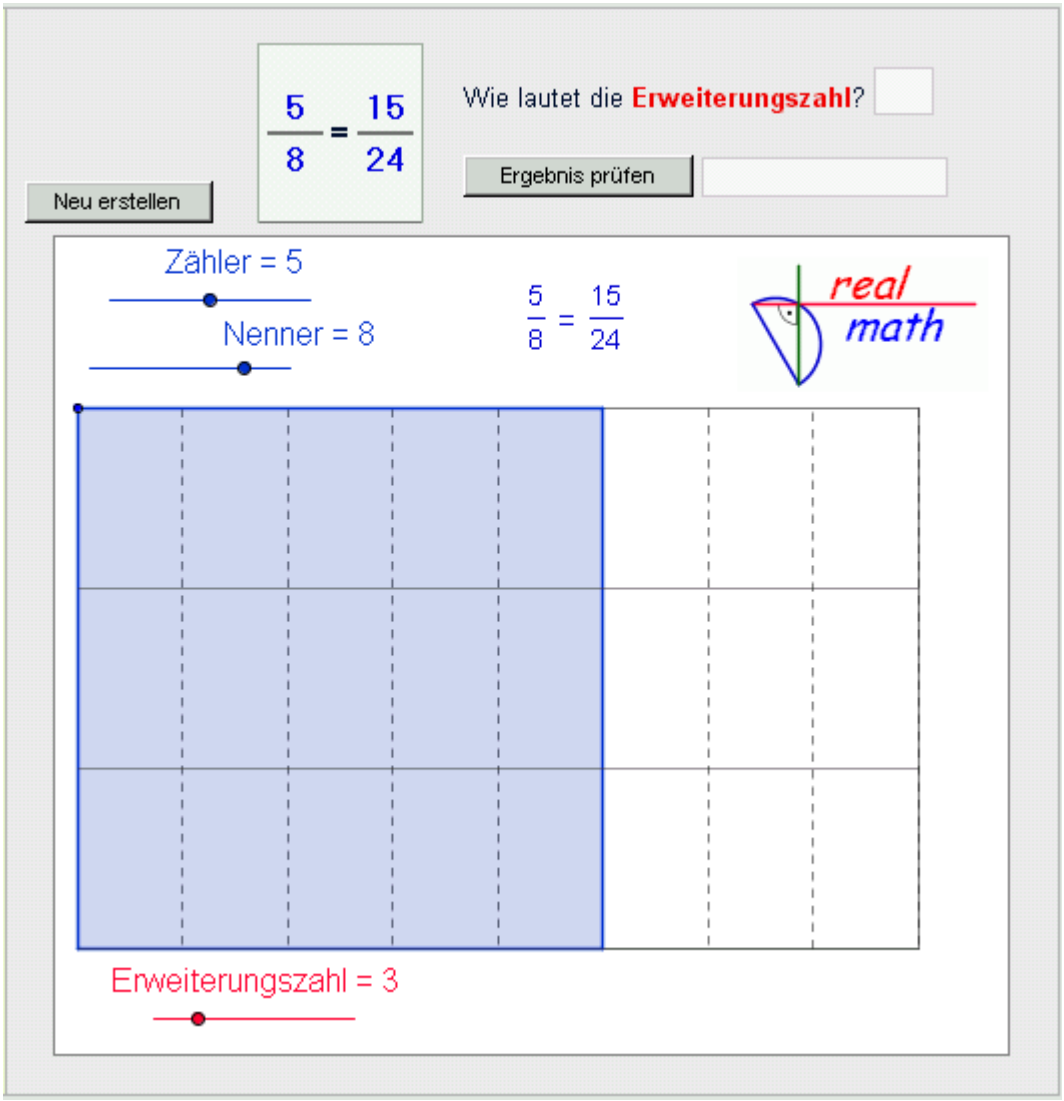
Andreas Meier
Sophie-Scholl-Realschule
Kurt-Schumacher-Allee 8
92637 Weiden i. d. OPf.

E-Mail: a.meier.wen@t-online.de
Homepage: http://www.realmath.de

MNU-Tagung Mathematik
Regensburg, 6. April 2009

Thema:
Mathematikunterricht bereichern

Experimentieren, Üben und Veranschaulichen mit interaktiven dynamischen Arbeitsblättern



Steigung einer Geraden - ein interaktiver dynamischer Zugang

Kurzkommentar:
Die Steigung einer Geraden ist eine der zentralen Grundlagen für das Verständnis linearer Funktionen. Ein an der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler orientierter Zugang und eine differenzierte Übungsumgebung mit interaktiven dynamischen Arbeitsblättern können einen wertvollen Beitrag zur Schaffung dieser Grundlage leisten.

Die Besonderheit der Übungen mit interaktiven dynamischen Arbeitsblättern ist darin zu sehen, dass von Schülerinnen und Schülern erstellte Zeichnungen per Computer analysiert und bewertet werden. Somit muss sich die Lehrkraft nicht mehr mit der unmittelbaren Korrektur der Schülerarbeiten befassen, sondern kann sich in einer differenzierten Unterrichtssituation leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern zuwenden und diesen bei auftretenden Schwierigkeiten helfend und erklärend zur Seite stehen. Alle dynamischen Zeichnungen innerhalb der HTML-Seiten wurden mit der kostenlosen Mathematiksoftware GeoGebra (http://www.geogebra.org) erstellt. Durch ihr Konzept, algebraische mit geometrischen Elementen zu verbinden, eignet sich diese Software in besonderer Weise, um interaktive dynamische Lernumgebungen zu erstellen.

Lernziele
Die Schülerinnen und Schüler sollen
- erkennen, dass die Steigung einer Geraden durch das Steigungsdreieck eindeutig festgelegt ist.
- die Gleichung von Ursprungsgeraden anhand der Steigung bestimmen können.
- Ursprungsgeraden nach einer gegebenen Gleichung zeichnen können.
- die Gleichung von Ursprungsgeraden aus den Koordinaten eines Punktes bestimmen können.

Didaktisch-methodischer Kommentar

1. Voraussetzungen
Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits den Zusammenhang der direkten Proportionalität und deren Darstellung in Form von Tabellen und Graphen wiederholt und den Begriff lineare Funktion kennen gelernt haben. Die Unterrichtseinheit selbst beinhaltet sechs Online-Arbeitsblätter, die mit jedem Internet-Browser (zum Beispiel Internet Explorer oder Firefox) dargestellt werden können. Damit die mit GeoGebra erzeugten dynamischen Veranschaulichungen realisiert werden können, muss Java 1.4.2 (oder höher) auf den Rechnern installiert und Javascript aktiviert sein (Java steht auf www.java.com zum kostenlosen Download zur Verfügung).

2. Erarbeitung des Begriffs der Steigung
2.1 Reale Ausgangssituation und mathematische Bezüge
„Im Straßenverkehr begegnet man Verkehrsschildern, die eine gefährliche Steigung oder ein gefährliches Gefälle ankündigen.“ In der Einleitung des ersten dynamischen Arbeitsblatts wird der Bezug zur Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler hergestellt. Anhand eines konkreten Beispiels - ein Verkehrsschild, das die Steigung von 8 Prozent anzeigt - wird der mathematische Zusammenhang erläutert. „Das Schild bedeutet, dass die Straße eine Steigung von 8 Prozent aufweist. Das heißt, sie steigt auf einer Länge von 100 Metern um 8 Meter an.“ Diesem Text folgt die mathematische Schreibweise des Zusammenhangs:

$$\frac{4}{50} = \frac{8}{100} = 8\%$$

2.2 Vertiefung durch weitere Beispiele

Im weiteren Unterrichtsverlauf kann nun die Lehrkraft unterschiedliche Verkehrsschilder mit Steigungen und Gefällen von 8 Prozent, 9 Prozent und 12 Prozent verwenden (vgl. **Abb. 1**).

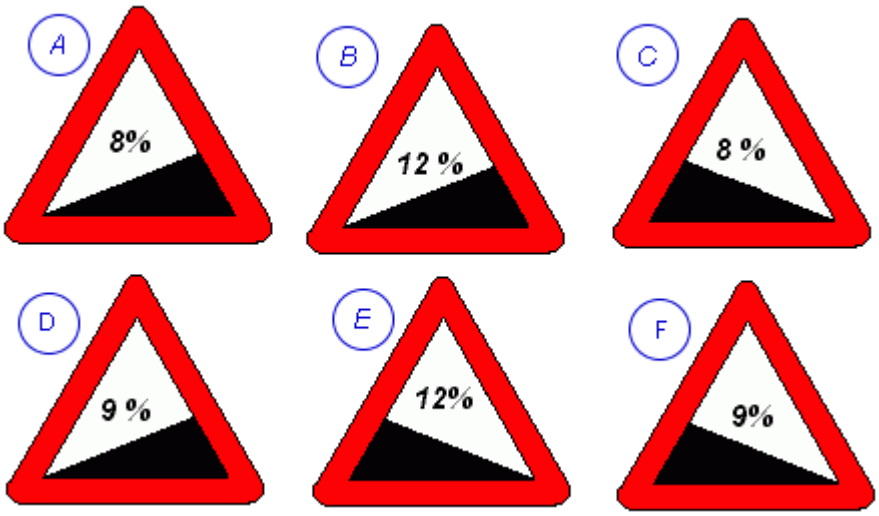


Abb. 1: Kopiervorlage für Folien

Dazu sollte die Lehrkraft diese Verkehrsschilder auf eine Folie drucken. Nun können die Schülerinnen und Schüler jeweils den zugehörigen Zusammenhang und die mathematische Formulierung verbal wiedergeben. Beispiel: Ein Verkehrszeichen zeigt ein gefährliches Gefälle von 12 Prozent. Die Schülerformulierung könnte dann beispielsweise lauten: „Das Schild bedeutet, dass die Straße ein Gefälle von 12 Prozent aufweist. Das heißt, sie fällt auf einer Länge von 100 Metern um 12 Meter.“ Oder mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{6}{50} = \frac{12}{100} = 12\%$$

2.3 Verständnis durch Variation

Nach der Klärung unterschiedlicher Verkehrsschilder folgt die Bearbeitung von Online- Arbeitsblatt 1 (vgl. **Abb. 2**). Durch Experimentieren mit dem Funktionsgraphen können die Lernenden den Wert für x in einem Verkehrsschild ermitteln. Die Aufgabe ist wie folgt gestellt: "Im dynamischen Arbeitsblatt ist eine Straße mit x Prozent Gefälle beziehungsweise x Prozent Steigung gezeichnet. Bewege den blauen Punkt und versuche, x zu ermitteln." Dabei ist zu beachten, dass auf den Verkehrsschildern x stets eine positive Zahl ist.

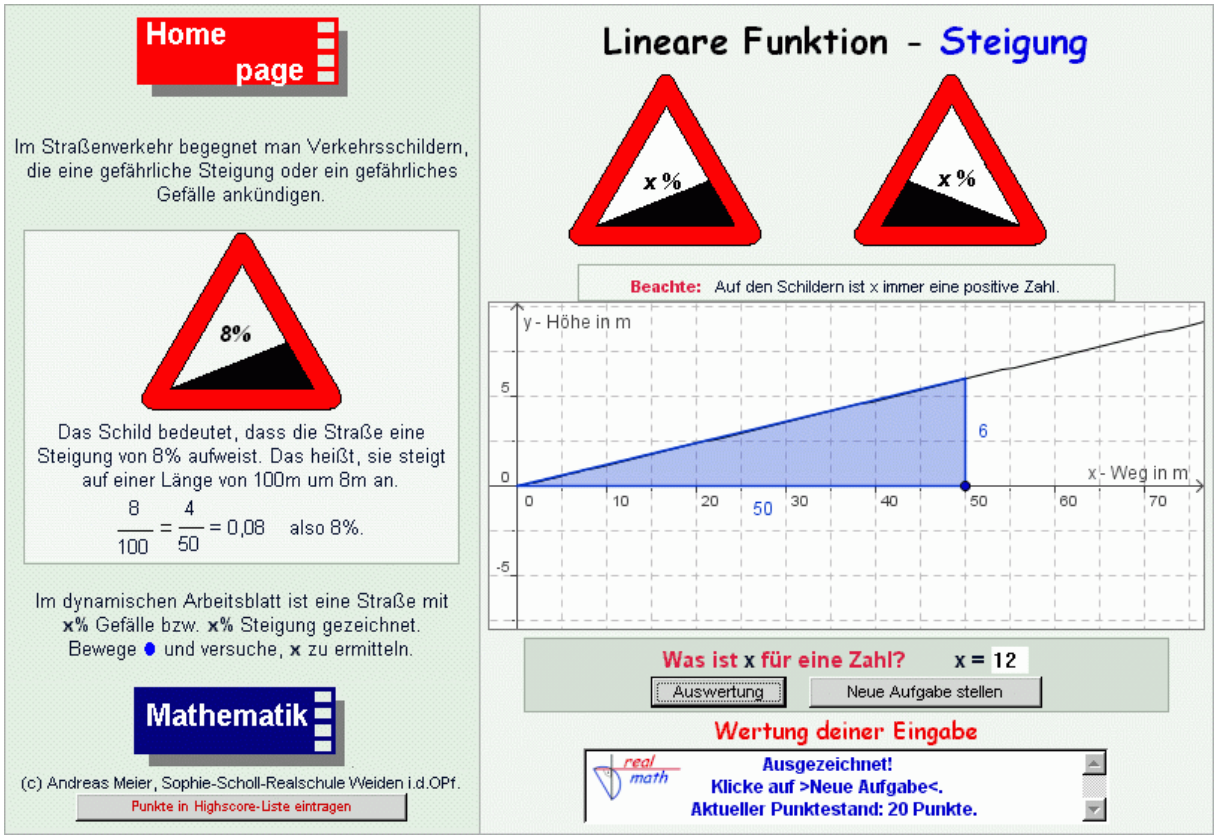


Abb. 2: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/steigung/steigungschild.html

2.4 Punktestand zur Kontrolle

Mit dem Button "Auswertung" können die Schülerinnen und Schüler ihre Eingabe überprüfen, mit dem Button "neue Aufgabe stellen" erstellt ein Zufallsgenerator einen weiteren Straßenverlauf. Die Klasse soll nun die per Zufallsgenerator erstellten Aufgaben lösen und dabei je mindestens 299 Punkte erreichen. Durch Beobachtung kann die Lehrkraft am erreichten Punktestand sehr schnell erkennen, wer noch Hilfe benötigt. So ist es möglich, die Schülerinnen und Schüler gezielt anzusprechen.

2.5 Zusammenfassung der Ergebnisse und Lernzielkontrolle

Anhand des Arbeitsblatts (siehe Anlage 1) werden die bisherigen Erkenntnisse schriftlich festgehalten und um die mathematische Komponente der Gleichung von Ursprungsgeraden erweitert (siehe Anlage 2). Hier ein Beispieleintrag:

$$y = \frac{4}{50}x \quad ; \quad y = \frac{8}{100}x \quad ; \quad y = 0{,}08x$$

Nach der gemeinsamen Besprechung des ersten Beispiels können die weiteren als Lernzielkontrolle eingesetzt und von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit behandelt werden. Schülerstatements mit Erklärungen und Zusammenfassungen sowie eine mögliche Korrektur der Schülererklärungen durch die Lehrkraft beschließen diese Unterrichtsphase.

2.6 Aufgabenvariation und Anwendung

Online-Arbeitsblatt 2 greift alle im bisherigen Unterrichtsverlauf gemachten Erfahrungen auf und führt sie zusammen (vgl. **Abb. 3**). Wieder geht es um Straßenverläufe, Steigung und Gefälle. Nun sind die sechs Verkehrsschilder, die zu Unterrichtsbeginn anhand einer Overhead-Folie analysiert wurden, in das Web-Arbeitsblatt integriert.

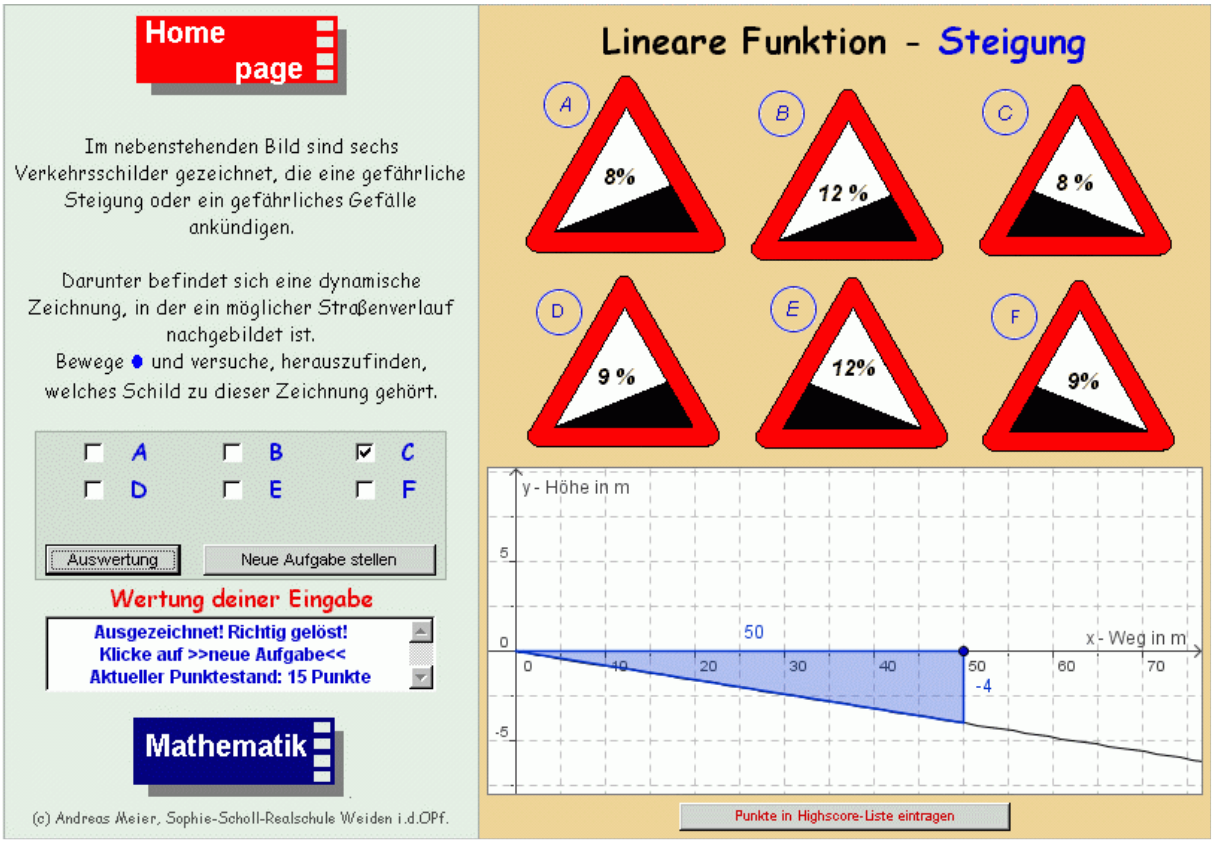


Abb. 3: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/steigung/verkehrsschild.html

Im dynamischen GeoGebra-Applet ist ein möglicher Straßenverlauf nachgebildet. Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler besteht darin, den Straßenverlauf dem jeweiligen Straßenschild zuzuordnen. Mit dem Button "Auswertung" wird die Eingabe überprüft, mit dem Button "neue Aufgabe stellen" entsteht per Zufallsgenerator ein weiterer Straßenverlauf. Ziel sollte es sein, möglichst viele Punkte zu erreichen. Mit diesem Wettbewerb endet die Unterrichtsstunde.

Während die erste Unterrichtsstunde konkret anschaulich angelegt war, folgt nun eine schrittweise Abstraktion bis hin zur Bestimmung der Gleichung einer Ursprungsgeraden aus den Koordinaten eines gegebenen Punktes ohne veranschaulichende Zeichnung.

3. Steigung und Steigungsdreieck

Das dritte Online-Arbeitsblatt dient zur Veranschaulichung der Steigungsdreiecke von Ursprungsgeraden (vgl. **Abb. 4**). Durch die Bewegung von Punkten können die Schülerinnen und Schüler verschiedene Steigungsdreiecke und Ursprungsgeraden einstellen. Aus der dynamischen Darstellung lässt sich so ablesen, dass der Quotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

stets konstant ist und es für die Berechnung von m Steigungsdreiecke gibt, aus denen der Steigungsfaktor sehr leicht bestimmt werden kann. Bei der Verwendung dieses Arbeitsblatts sind die Lernenden selbst dafür verantwortlich, wie viele unterschiedliche Geraden und Steigungsdreiecke sie zeichnen wollen, um sich den Sachverhalt zu verdeutlichen. Sind sie der Ansicht, den Sachverhalt verstanden zu haben, so können sie sich mit den unterschiedlichen Übungen beschäftigen.

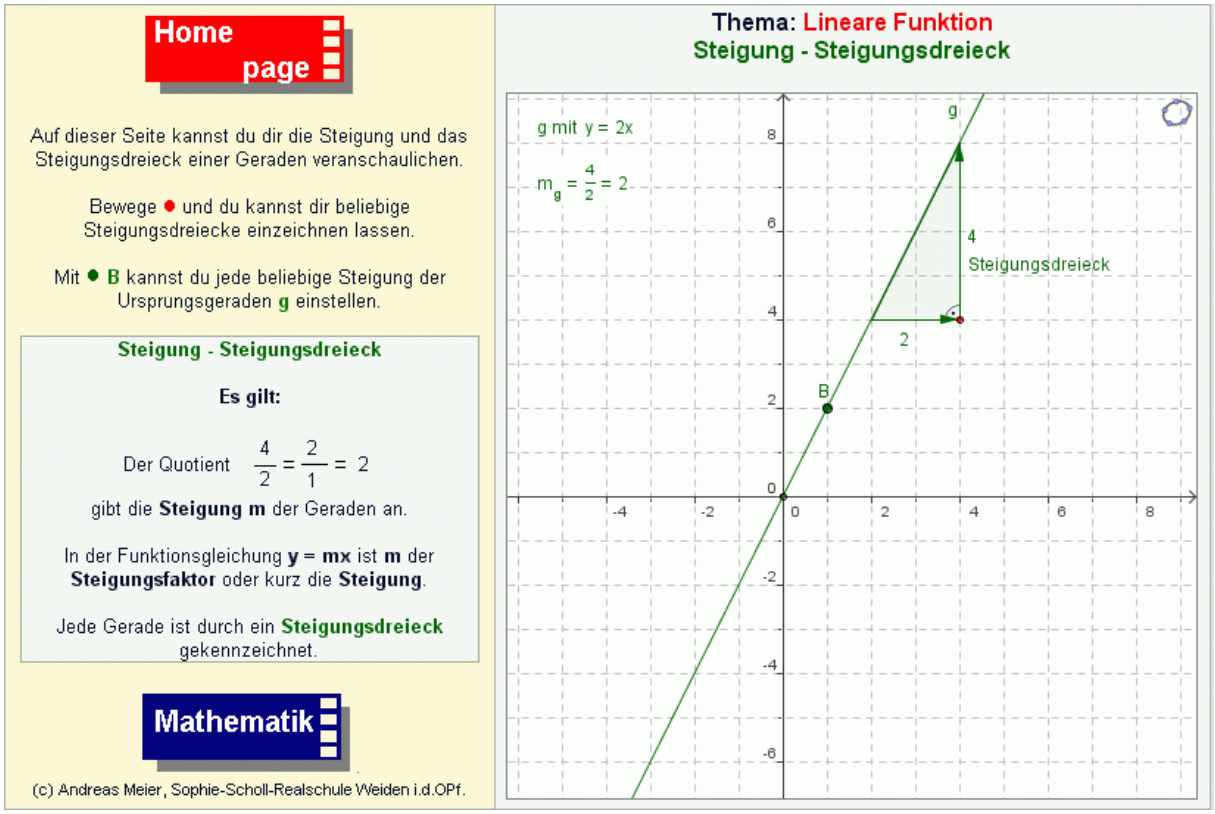


Abb. 4: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/steigung/steigung.html

4. Variables Übungsangebot - Differenzierung und Individualisierung

Der zeitliche Umfang der im Folgenden eingesetzten drei Online-Arbeitsblätter und des Papierarbeitsblatts (siehe Anlage 3) richtet sich nach der individuellen Zusammensetzung der Klasse. Zwei Unterrichtsstunden sind in den meisten Fällen realistisch.

4.1 Gleichung einer Ursprungsgeraden angeben

Aus dem Online-Arbeitsblatt 4 soll die Lerngruppe die Gleichung einer vorgegebenen Ursprungsgeraden ablesen(vgl. **Abb. 5**). Dabei bietet das Arbeitsblatt die Möglichkeit, dass sich die Schülerinnen und Schüler zur Bearbeitung der Aufgabe ein günstiges Steigungsdreieck einzeichnen und so die Gleichung der Ursprungsgeraden bestimmen können. Mit "Gleichung prüfen" wird die Schülereingabe kontrolliert, mit "Neue Aufgabe" werden weitere Aufgaben gestellt. Dabei können leistungsstärkere Klassenmitglieder angehalten werden, die Gleichung der Ursprungsgeraden anzugeben, ohne sich ein Steigungsdreieck zu zeichnen, während andere weiterhin diese Veranschaulichung benutzen.

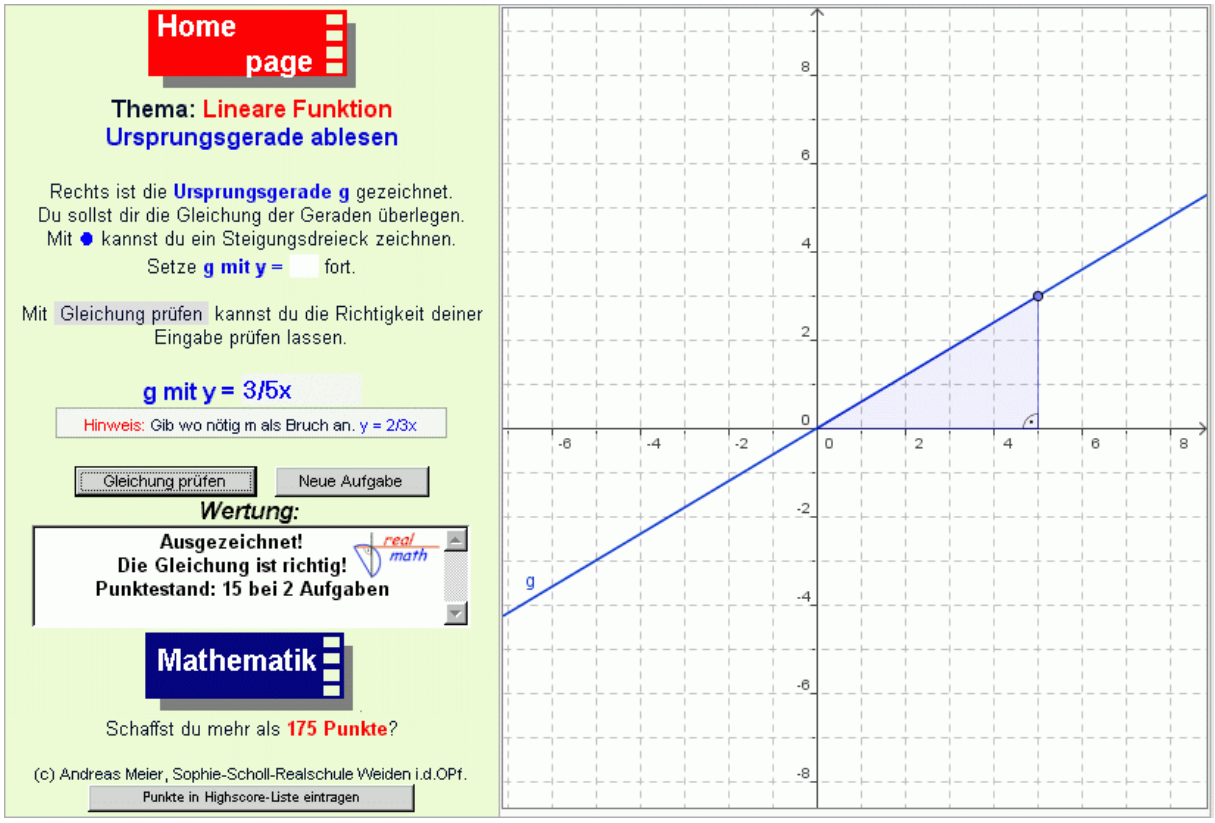


Abb. 5: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/ursprungsgeraden/ugeradeablesen.html

4.2 Ursprungsgerade nach vorgegebener Gleichung zeichnen (Steigung als Dezimalzahl)
Mithilfe eines Punktes, dessen Koordinaten in Echtzeit angezeigt werden, soll im Online-Arbeitsblatt 5 eine Ursprungsgerade gezeichnet werden, deren Gleichung gegeben ist (vgl. **Abb. 6**).

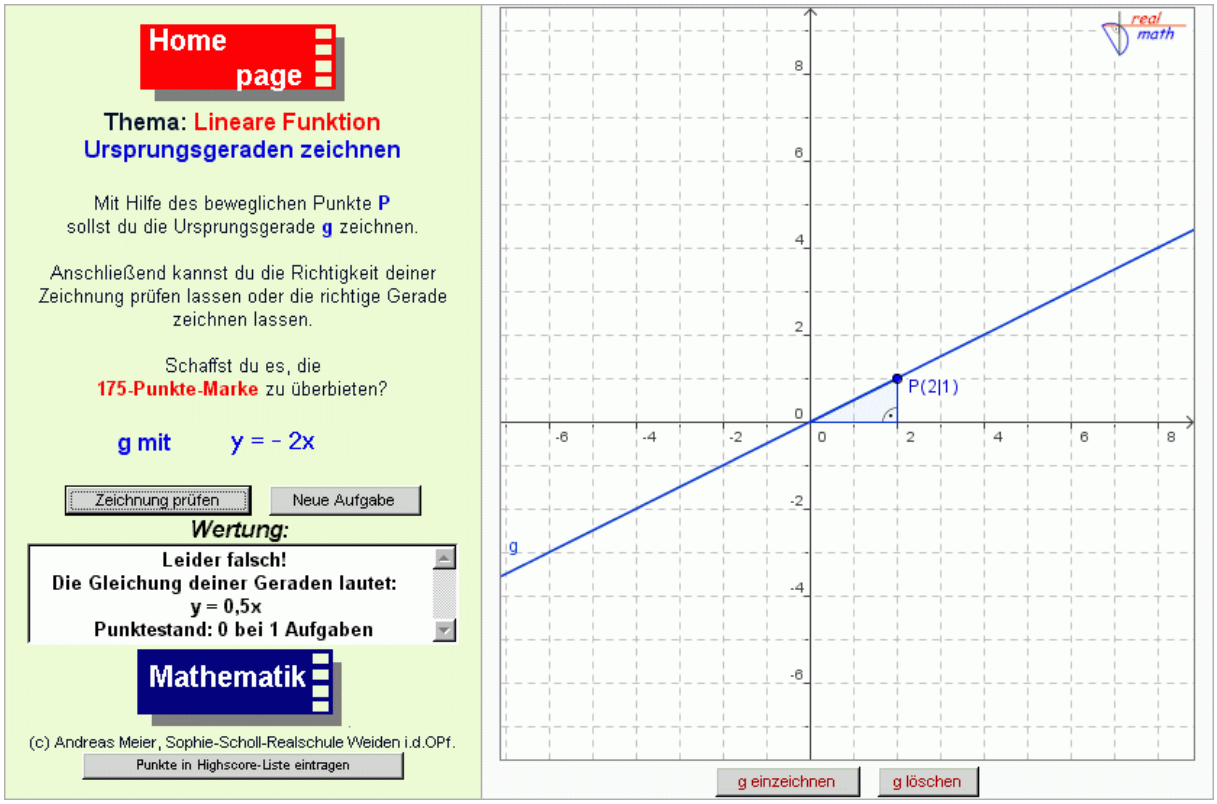


Abb. 6: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/ursprungsgeraden/ugeradezeichnen.php

4.3 Ursprungsgerade nach vorgegebener Gleichung zeichnen (Steigung als Bruchzahl)

Mithilfe eines Punktes, dessen Koordinaten in Echtzeit angezeigt werden, soll im Online-Arbeitsblatt 6 eine Ursprungsgerade gezeichnet werden, deren Gleichung gegeben ist (vgl. **Abb. 7**). Dabei ist die Steigung als ganze Zahl oder Bruchzahl geschrieben.

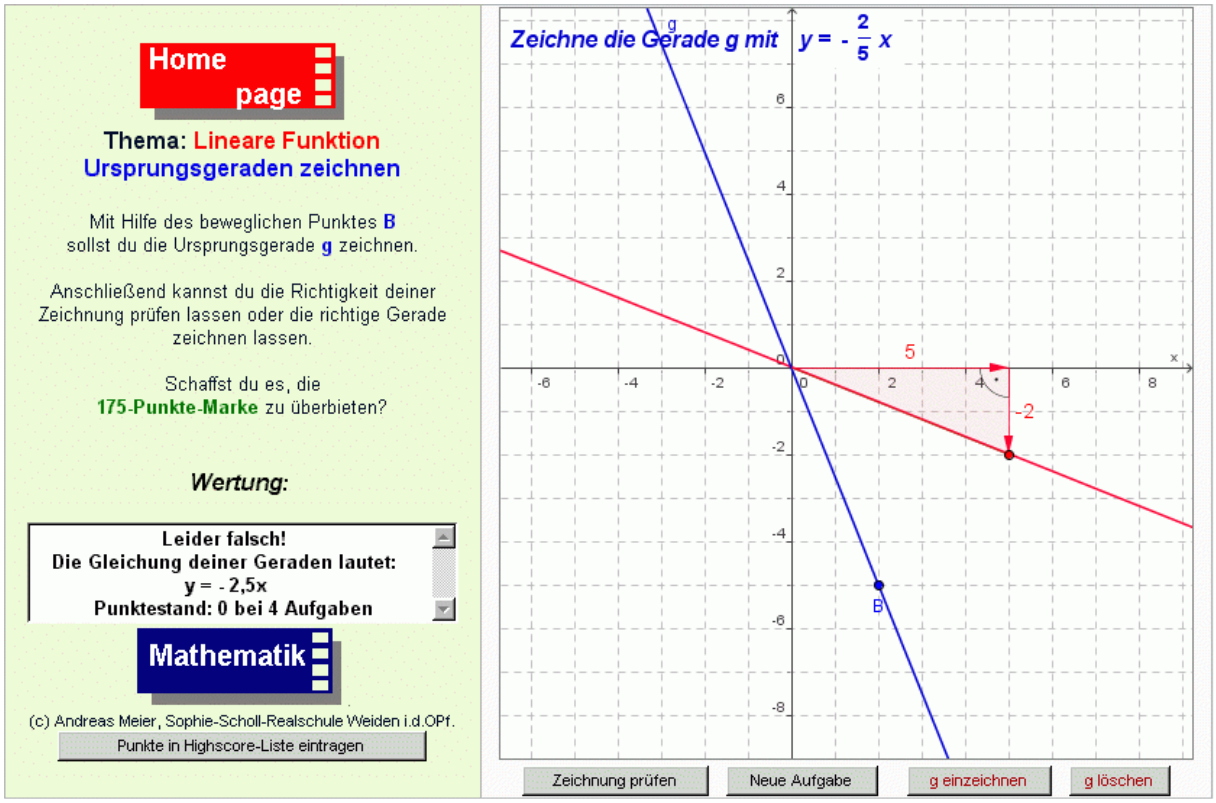


Abb. 7: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/ursprungsgeraden/ugeradezeichnenneu.php

Die Schülerinnen und Schüler erhalten stets eine Rückmeldung bezüglich ihrer gezeichneten Geraden und können sich bei Bedarf sogar die Lösung einzeichnen lassen. Deshalb eignet sich dieses Arbeitsblatt sehr gut für einen individualisierten Unterricht. Die Lehrkraft greift nur dann ein, wenn die Lernenden mit den Rückmeldungen nicht zurechtkommen. Die Lehrkraft wird damit zu einem Moderator im Lernprozess. Die Möglichkeit, eigenständig Wissen zu erwerben und auch anwenden zu können, steigert dabei in hohem Maße die Eigenverantwortlichkeit der Schülerinnen und Schüler.

4.4 Gleichung der Ursprungsgeraden aus einem Punkt ermitteln

In Online-Arbeitsblatt 7 besteht die Aufgabe darin, die Gleichung einer Ursprungsgeraden anzugeben, von der nur die Koordinaten eines Punktes gegeben sind (vgl. **Abb. 8**). Zur Veranschaulichung wird dieser Punkt aber noch in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich anhand der Lage des Punktes ein Steigungsdreieck vorstellen. Diese Übung leitet damit den Abstraktionsprozess ein, durch den später Gleichungen von Ursprungsgeraden ohne konkrete Zeichnung rechnerisch bestimmt werden sollen. Zur Veranschaulichung wird dieser Punkt aber noch in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich anhand der Lage des Punktes ein Steigungsdreieck vorstellen.

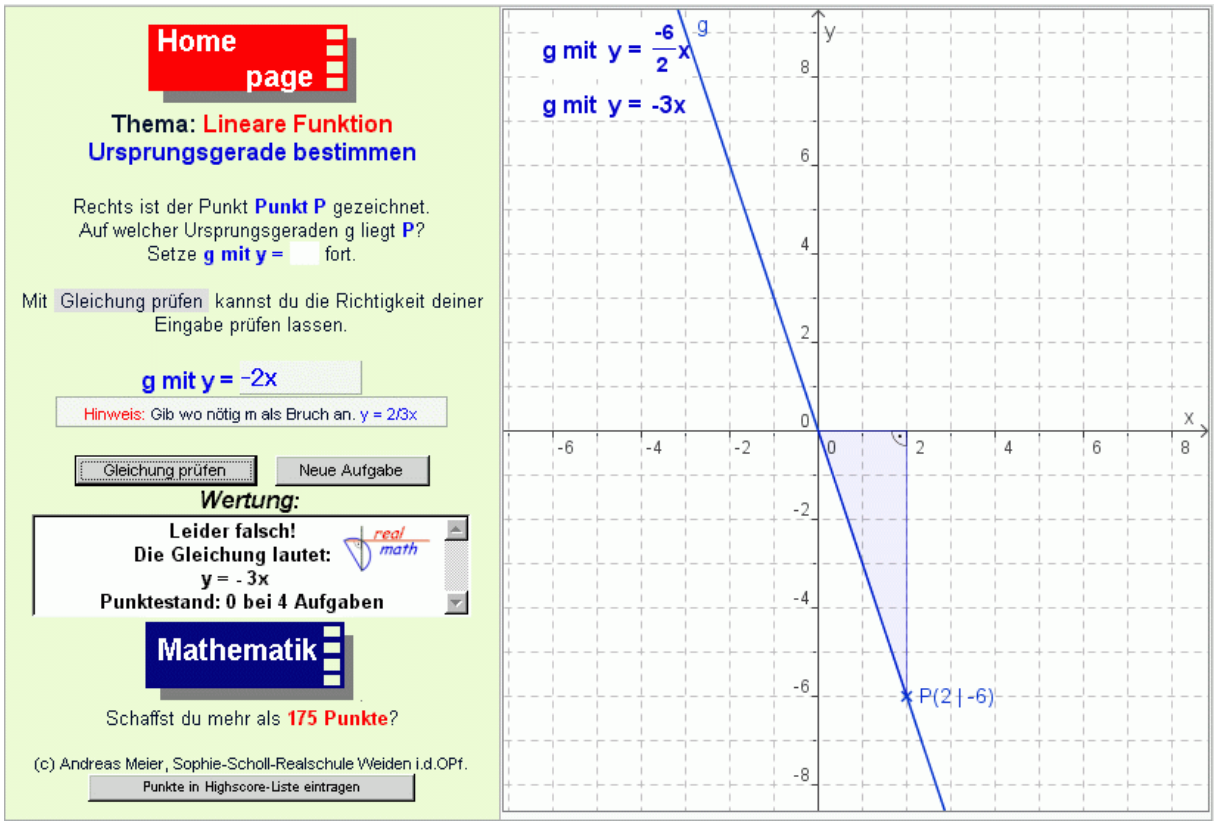


Abb. 8: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/linearefunktion/punktaufg.html

Diese Übung leitet damit den Abstraktionsprozess ein, durch den später Gleichungen von Ursprungsgeraden ohne konkrete Zeichnung rechnerisch bestimmt werden sollen. Nach der Eingabe der Gleichung und der Betätigung des Buttons "Gleichung prüfen" werden die Berechnung der Gleichung der Ursprungsgeraden und die Gerade selbst eingeblendet. Dies soll den Lernenden den Bearbeitungsweg und die Lösung der Aufgabe verdeutlichen. Die flexible und informative Rückmeldung eröffnet dabei auch die Möglichkeit einer eigenständigen Fehleranalyse.

5. Besonderheiten der interaktiven dynamischen Übungsform

5.1 Motivation durch Wettbewerbssituation

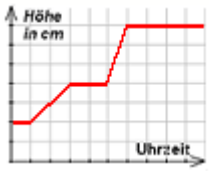
Die Vergabe von Punkten bei allen Übungen und die damit verbundene Wettbewerbssituation führt zu einer zusätzlichen Motivation. Das so erzeugte spielerische Element innerhalb der mathematischen Übungen ist eines der wesentlichen Merkmale aller zur Lernumgebung gehörenden Aufgaben. Man kann im Unterricht immer wieder beobachten, dass sich Schülerinnen und Schüler bei Wettbewerben in einem Maße engagieren, wie dies im herkömmlichen Unterricht nicht der Fall ist.

5.2 Vom Belehren und Korrigieren zur Kooperation - die neue Lehrerrolle

Für jede gelöste Aufgabe gibt es 15 Punkte. Die Anzeige des Punktestandes und der Aufgabenzahl ermöglicht es der beobachtenden Lehrkraft, die jeweiligen Schülerleistungen schnell einzuschätzen. So ist es möglich, Klassenmitglieder gezielt zu loben, aber auch leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern individuell zu helfen. Die Lehrkraft tritt somit aus der belehrenden, korrigierenden Rolle heraus - dies übernimmt der Computer - und übernimmt eine moderierende, unterstützende und kooperative Rolle.

5.3 Herkömmliche Lernzielkontrolle mit Papier und Bleistift
Abschließend kann eine Leistungserhebung durchgeführt werden, bei der die Inhalte der vorangegangenen drei Übungen abgefragt und die Leistungen der Schülerinnen und Schüler überprüft werden (Anlage 3). Dieser Test kann aber auch als Hausaufgabe gegeben oder in Form einer Partnerarbeit im Anschluss an die Online-Arbeitsblätter bearbeitet werden. So mündet die Arbeit am Computer wieder in die herkömmliche Unterrichtsarbeit im Klassenzimmer.

Lineare Funktionen mit interaktiven Arbeitsblättern erkunden



Kurzkommentar:
Sachverhalte graphisch darstellen sowie Sachverhalte aus Graphen ablesen und interpretieren zu können sind Grundfertigkeiten, auf die wir in unserer modernen Lebenswelt nicht verzichten können. Diese Fähigkeiten im Unterricht auszubilden, ist nicht zuletzt auch Aufgabe eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts, der sich an den Bildungsstandards orientiert.

In der Verbindung von Alltagssituationen mit dem Thema Lineare Funktionen soll den Schülerinnen und Schülern in dieser Unterrichtseinheit durch den Einsatz von interaktiven Webseiten ein eigenständiger Wissenserwerb ermöglicht werden. Die graphische Darstellung der bei Regen steigenden Wasserhöhe in einer Regentonne in Abhängigkeit von der Zeit ist das Thema des ersten interaktiven Arbeitsblattes, das in dieser Unterrichtseinheit zum Einsatz kommt.

Wird das Arbeitsblatt für den Einstieg in das Themengebiet "Lineare Funktionen" verwendet, kann hier propädeutisch der Begriff der Steigung erarbeitet werden. Kommt das Online-Arbeitsblatt erst im Verlauf des Themas zum Einsatz, so kann der mathematisch erarbeitete Begriff der Steigung mit neuer anschaulicher Bedeutung gefüllt werden. In dem darauf folgenden zweiten interaktiven Arbeitsblatt sind unterschiedliche Preisangebote eines Kartbahnbetreibers grafisch dargestellt. Es ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, die eben erworbenen Kenntnisse in einem neuen Aufgabenumfeld anzuwenden und sich in einem Wettbewerb mit den Mitschülern zu messen.

Lernziele
Die Schülerinnen und Schüler sollen
- Texte grafischen Darstellungen zuordnen,
- Informationen aus graphischen Darstellungen entnehmen und interpretieren,
- selbstständig Texte zu graphischen Darstellungen erstellen,
- eigene graphische Darstellungen zu Sachverhalten entwerfen.

Didaktisch-methodischer Kommentar

1. Voraussetzungen
Die Unterrichtseinheit basiert auf zwei HTML-Seiten, die mit jedem Internet-Browser , wie dem Microsoft Internet Explorer oder Firefox, dargestellt werden können. Damit die Interaktivität möglich wird, muss jedoch Javascript im Browser aktiviert sein. Die Inhalte der Webseiten sind so konzipiert, dass eine Behandlung der Linearen Funktionen als Voraussetzung zur Bearbeitung der Aufgaben nicht zwingend notwendig ist. Die Aufgaben können sogar als Baustein für den Einstieg in die Thematik Lineare Funktion verwendet werden.

2. Texte analysieren - Graphen interpretieren

2.1 Projektion des interaktiven Arbeitsblatts per Beamer

Die Lehrkraft präsentiert den Sachverhalt mithilfe des Online-Arbeitsblattes per Beamer (vgl. **Abb. 1**) und gibt das Papierarbeitsblatt (siehe Anlage) an die Schülerinnen und Schüler aus. Diese sollen dann die zehn darauf formulierten Aufgaben ohne Verwendung des Computers in Einzelarbeit bearbeiten. Im Anschluss daran vergleichen sie mit ihrer Partnerin oder ihrem jeweiligen Partner die gefundenen Ergebnisse, stellen Gemeinsamkeiten fest oder diskutieren unterschiedliche Standpunkte.

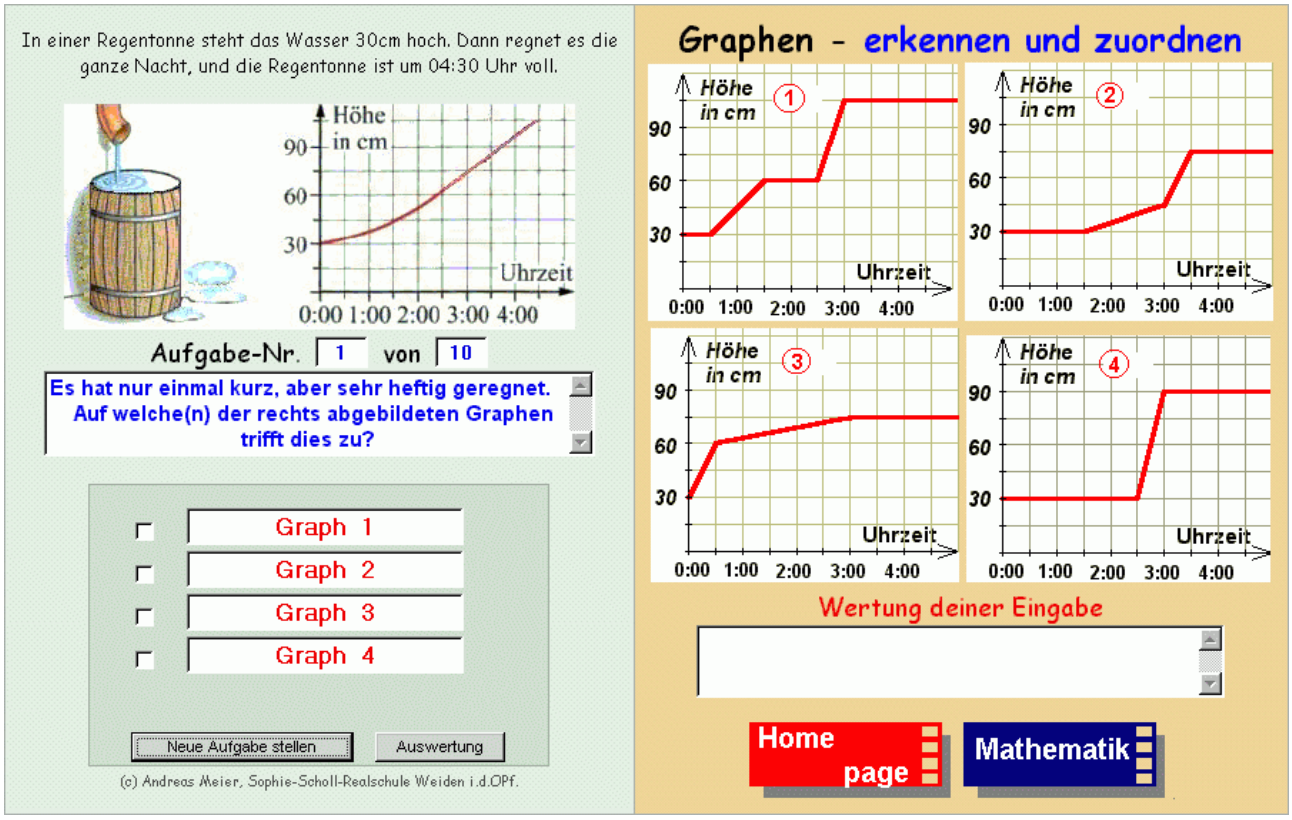


Abb. 1: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/linfkt/regentonne.html

2.2. Die Lernenden korrigieren und ergänzen ihre Ergebnisse

Die individuelle Korrektur der Aufgaben erfolgt dann nicht durch die Lehrkraft, sondern durch den Einsatz von Online-Arbeitsblatt 1 (vgl. **Abb. 1**). Die Schülerinnen und Schüler rufen erst jetzt die entsprechende Webseite auf, bearbeiten die einzelnen Aufgaben und überprüfen so ihre bisherigen Ergebnisse. Dabei kann es durchaus sein, dass sie ihre Lösungen neu überdenken müssen. Der Computer dient hier als Kontrollinstrument, das zu weiterer Diskussion des Sachverhalts anregen kann. In dieser Phase des Unterrichts sollte es die Lehrkraft vermeiden, sich in die Diskussion der Schülerinnen und Schüler einzuschalten. Ihre Aufgabe besteht ausschließlich im Beobachten, nicht im Bewerten.

2.3. Zusammenfassung und Präsentation durch Schülerstatements

Die Lehrkraft projiziert anschließend die einzelnen Aufgaben des interaktiven Web-Arbeitsblattes zur Regentonne per Beamer. Dazu erläutert jeweils eine Schülerin oder ein Schüler ihre beziehungsweise seine gefundenen Lösungen vor der Klasse.

2.4. Differenzierung und Vertiefung

Nun sind die Schülerinnen und Schüler selbst aufgefordert, in Partnerarbeit Texte zu bestehenden Graphen sowie eigene Graphen und dazugehörige Texte zu verfassen. Um eine sich anschließende Diskussion im Klassenverband anschaulich zu gestalten, sollte die Lehrkraft Folien mit den Aufgaben an die einzelnen Teams ausgeben. Die OHP-Folien (siehe Anlage) dienen dazu, dass einige der Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse zum Regentonnen-Arbeitsblatt für alle sichtbar präsentieren können. Anhand dieser Folien kann eine fundierte Bewertung der Ergebnisse durch die Mitschüler erfolgen.

3. Anwendung, Vertiefung und Wettbewerb

3.1 Kartbahn-Aufgabe

Bei der Bearbeitung des interaktiven Arbeitsblattes zur Kartbahn sollen die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Preisangebote drei farbigen Graphen zuordnen und anschließend unterschiedliche Aufgaben bearbeiten (vgl. **Abb. 2**).. Mithilfe des Buttons "Wertung" wird die Eingabe geprüft und Punkte werden vergeben. Mit "Neu fragen" werden neue Aufgaben gestellt. Als besonderer Anreiz besteht dabei die Möglichkeit, die erreichten Punkte in eine Highscore-Liste eintragen zu lassen.

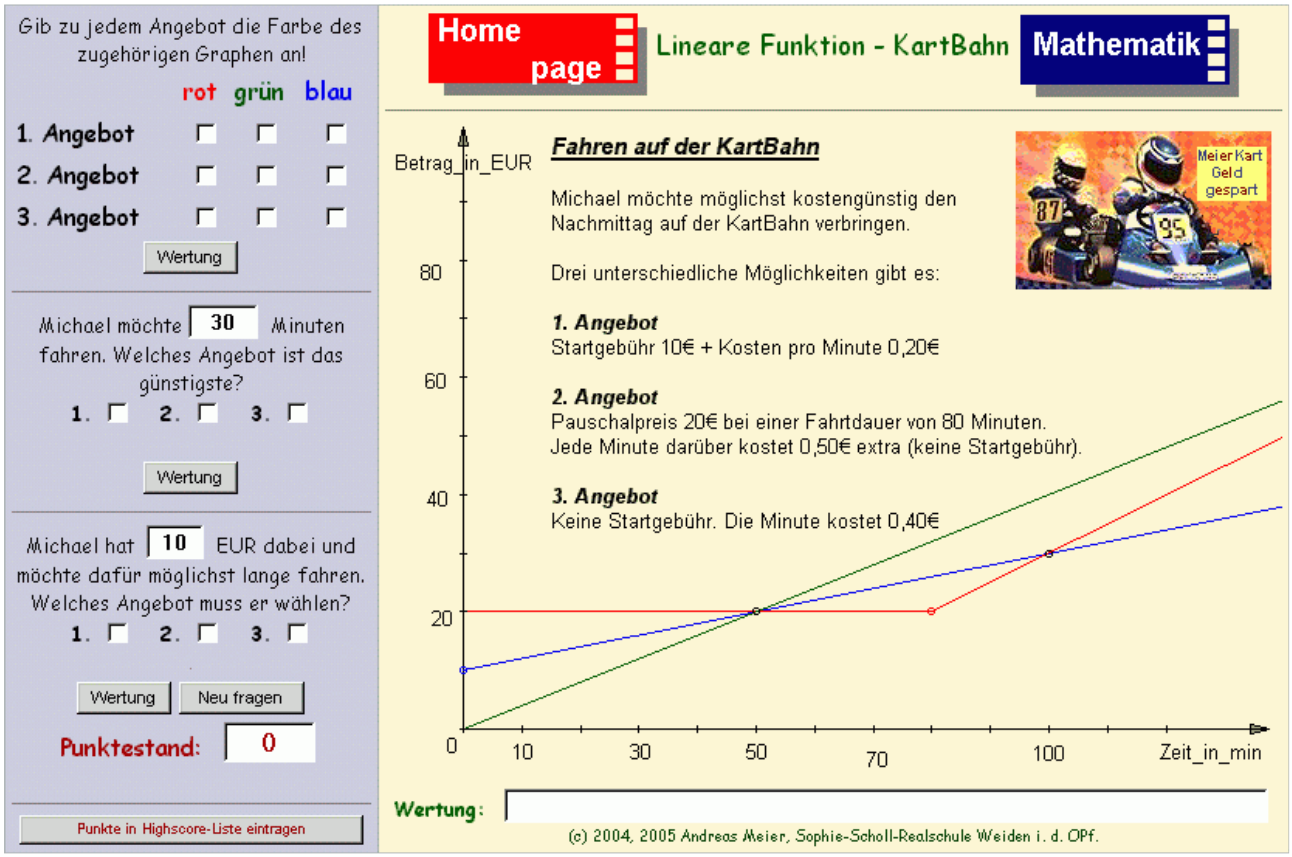


Abb. 2: http://www.realmath.de/Neues/Klasse8/kartbahn.html

3.2. Hausaufgabenstellung

Die Unterrichtsstunde beendet die Hausaufgabenstellung (siehe Anlage), die sich an den zuletzt gestellten Aufgaben des Web-Arbeitsblattes 2 orientiert. Darüber hinaus sollen die Zusammenhänge der Aufgabenstellung, die dem Web-Arbeitsblatt 2 zugrunde liegt, verbalisiert werden.

4. Besonderheiten beim Üben mit interaktiven Arbeitsblättern

4.1 Einsatz motivierender Medien

Aufgaben spielen für die Motivierung des Lernens und für ein verständnisvolles Erschließen, Üben und Vertiefen von Wissen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht. Deshalb besteht gerade in der Weiterentwicklung von Aufgabenstellungen und der Form ihrer Bearbeitung ein beträchtliches Potenzial zur weiteren Optimierung des Mathematikunterrichts. Im Rahmen dieser Weiterentwicklung von Aufgaben und Aufgabenumfeldern sollte auch der Einsatz moderner, die Schülerinnen und Schüler motivierender Medien berücksichtigt werden. Interaktive Arbeitsblätter können durch die Variation von Aufgabenstellungen Lernräume für selbstständiges, eigenverantwortliches und kooperatives Lernen schaffen.

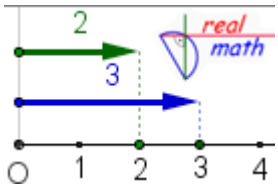
4.2 Unterricht als aktives Geschehen

Lehrerzentriertes Unterrichten, das die Schülerinnen und Schüler in einer passiven Rolle des Wissensempfängers belässt, kann sehr leicht zu nachlassendem Interesse am Lerngegenstand führen. Kooperative Arbeitsformen hingegen veranlassen die Schülerinnen und Schüler, zu argumentieren, Gedachtes sprachlich verständlich zu fassen und die Perspektive des jeweils Anderen einzunehmen. Damit wird Unterricht zu einem aktiven Geschehen, das Raum für Entdeckungen aber auch Fragen lässt. Der Einsatz von interaktiven webbasierten Arbeitsblättern kann dazu beitragen, ein produktives, motivierendes Arbeitsklima zu schaffen. Der Unterricht erhält zudem ein neues Gestaltungselement und kann somit abwechslungsreicher organisiert werden.

4.3 Üben ist mehr als nur die Anwendung von Routinen

Im Mathematikunterricht werden die Schülerinnen und Schüler häufig mit anspruchsvollen Inhalten und komplexen Problemstellungen konfrontiert. Erkenntnis- und Lernfortschritte werden sie nur dann erzielen, wenn sie systematisch und konzentriert vorgehen. Um die notwendige Sicherheit zu gewinnen, muss das neu erworbene Wissen ständig wiederholt und auf unterschiedliche Aufgabenstellungen angewandt und somit geübt werden. Effektives Üben sollte dabei über ein bloßes Anwenden von Routinen hinausgehen. Der Einsatz von interaktiven Arbeitsblättern zum Interpretieren von unterschiedlichen Graphen kann Möglichkeiten für ein solches Üben bieten. Selbstständiges, nicht ständig durch die Lehrkraft kontrolliertes Bearbeiten von Aufgaben, bei dem der Hinweis auf fehlerhafte Lösungen nicht "öffentlich" wird, stärkt die Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf ihr eigenes, selbstverantwortetes Lernen. Ein solches Arbeiten gibt den Schülerinnen und Schülern eine größere Freiheit beim Wissenserwerb, aber auch mehr Verantwortung für das eigene Lernen.

Addition ganzer Zahlen - dynamisch entdecken



Kurzkommentar:
Die dynamische Veranschaulichung algebraischer Zusammenhänge eröffnet Schülerinnen und Schülern neue Lernzugänge. Die Rechenregeln bei der Addition ganzer Zahlen auf diese Weise selbstständig zu finden, wird so zu einer interessanten und spannenden Entdeckungsreise in die Welt der ganzen Zahlen.

Die hier vorgestellte dynamische Veranschaulichung wurde mit der kostenlosen Mathematiksoftware GeoGebra erstellt und in eine interaktive Webseite eingebunden. Dies ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern zu probieren, zu beobachten und ihre Vermutungen einer Prüfung zu unterziehen. Direkte Rückmeldungen unterstützen die Lernenden auf dem Weg, die Rechenregeln für die Addition ganzer Zahlen zu finden, sowie bei der Anwendung und Festigung der erworbenen Kenntnisse. Durch den Einsatz interaktiver dynamischer Arbeitsblätter erfährt das selbstverantwortete Lernen eine methodische Bereicherung.

Lernziele
Die Schülerinnen und Schüler sollen
- durch Experimentieren die unterschiedlichen Regeln für die Addition ganzer Zahlen selbstständig finden.
- die Regeln für die Addition ganzer Zahlen verbal beschreiben und die erworbenen Kenntnisse auf unterschiedliche Beispiele anwenden können.

Didaktisch-methodischer Kommentar

1. Voraussetzungen

1.1 Inhaltliche Voraussetzungen
Die Schülerinnen und Schüler sollen die Darstellung ganzer Zahlen mit Zahlenpfeilen und die Addition von natürlichen Zahlen mithilfe des Zahlenpfeilmodells bereits kennen. Ferner muss der Begriff des absoluten Betrages einer ganzen Zahl vorbesprochen sein. Beispielhafte Aufgaben für die Grundlegung dieser Kenntnisse finden sich auf realmath.de:

- Das Zahlenpfeilmodell der Addition
  http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/ganzezahlen/zahlenpfeilmodell_add.html
- Der absolute Betrag einer Zahl
  http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/gegenzahl/absoluterbetragzpf.html

1.2 Technische Voraussetzungen
Die Unterrichtseinheit selbst basiert auf zwei Online-Arbeitsblättern zum Thema Addition ganzer Zahlen, die mit jedem Internet-Browser, wie zum Beispiel Microsoft Internet Explorer oder Firefox, dargestellt werden können. Damit die dynamische Veranschaulichung realisiert werden kann, muss wieder Java 1.4.2 (oder höher) auf den Rechnern installiert und Javascript aktiviert sein.

2. Funktionsweise des dynamischen interaktiven Arbeitsblattes

Das erste Online-Arbeitsblatt dient zur Erarbeitung der Regeln für die Addition ganzer Zahlen mit gleichen und verschiedenen Vorzeichen. Mit den Auswahlbuttons "1. Addition ganzer Zahlen mit gleichen Vorzeichen" und "2. Addition ganzer Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen" wird die entsprechende Voreinstellung gewählt (vgl. **Abb. 1**). Mit dem Button "Aufgabe neu" wird eine zugehörige Aufgabe erzeugt. Die beiden Summanden können nun mit den Elementen "Erster Summand" und "Zweiter Summand" im dynamischen Arbeitsblatt eingestellt werden. Die entsprechende Addition im Zahlenpfeilmodell wird zeitgleich erzeugt und das Ergebnis kann abgelesen werden. Das so gefundene Ergebnis wird in das vorgesehene Feld eingetragen. Der Button "Ergebnis prüfen" dient zur Kontrolle des Ergebnisses.

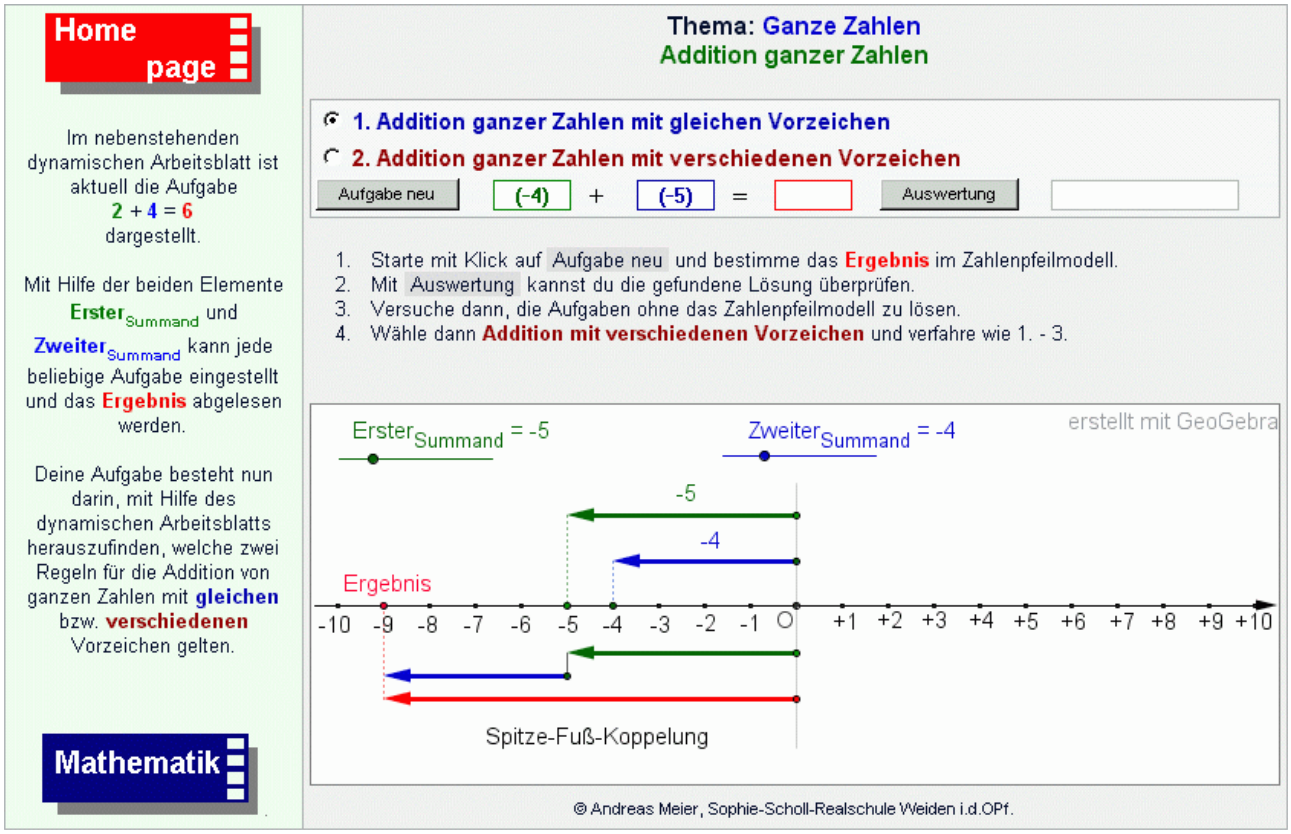


Abb. 1: http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/ganzezahlen/ggbaddganzzahl.html

3. Addition ganzer Zahlen mit gleichen Vorzeichen

3.1 Erarbeitungsphase

Die Schülerinnen und Schüler experimentieren mit dem Online-Arbeitsblatt, beobachten und erarbeiten anschließend selbstständig die Regeln für die Addition von ganzen Zahlen mit gleichen Vorzeichen. Dazu bearbeiten sie einige Aufgaben in der oben dargestellten Weise und halten die Ergebnisse auf dem von der Lehrkraft bereitgestellten Notizblatt fest. Sie sind beim Lösen der Aufgaben durch die dynamische Veranschaulichung ferner aufgefordert, herauszufinden, welche Regel der Addition ganzer Zahlen mit gleichen Vorzeichen zugrunde liegt. Sie sollen anschließend Aufgaben lösen, ohne dabei die Veranschaulichung zu benutzen. Die Schülerinnen und Schüler halten anschließend ihre gefundene Regel schriftlich auf dem Notizblatt fest (siehe Anlage).

3.2 Zusammenfassung

Im nächsten Unterrichtsschritt stellt eine Schülerin oder ein Schüler den gefundenen allgemeinen Zusammenhang in einem kurzen Statement vor. Die Lehrkraft korrigiert oder bestätigt und fixiert

die Ergebnisse auf einer Folie, die dem Arbeitsblatt der Schülerinnen und Schüler entspricht. Die Einträge werden von den Lernenden in ihr Arbeitsblatt übernommen (siehe Anlage). Durch die in das Arbeitsblatt eingefügten Zahlenpfeildarstellungen wird der Prozess der Regelfindung dokumentiert.

3.3 Anwendung

Auf dem Schülerarbeitsblatt finden sich zusätzlich einige Aufgaben zur Addition ganzer Zahlen mit gleichen Vorzeichen. Diese können anschließend wahlweise in Partner- oder Einzelarbeit bearbeitet werden. Nicht bearbeitete Aufgaben können als Hausaufgabe verwendet werden.

4. Addition ganzer Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

Die Lernphasen "Erarbeitung", "Zusammenfassung" und "Anwendung" verlaufen analog zu der Addition ganzer Zahlen mit gleichen Vorzeichen. Es muss nun lediglich vor Beginn der Erarbeitungsphase der Auswahlbutton "2. Addition ganzer Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen" im dynamischen Arbeitsblatt angeklickt werden (vgl. **Abb. 2**).

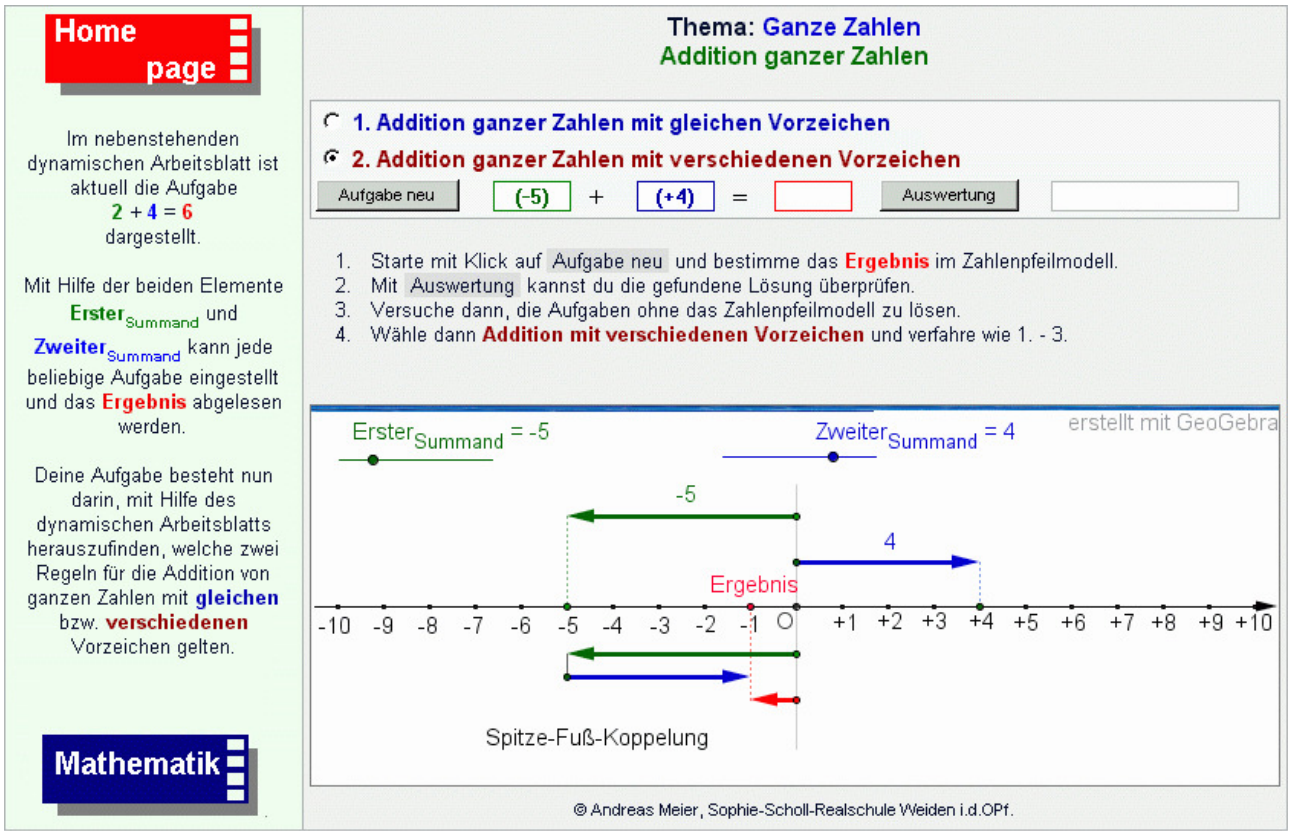


Abb. 2: http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/ganzezahlen/ggbaddganzzahl.html

5. Zeit für individuelle Betreuung

5.1 Selbsterklärende interaktive Arbeitsblätter schaffen Freiräume

Die Bedienung des zweiten interaktiven Online-Arbeitsblattes "Übung zur Addition ganzer Zahlen" ist einfach. Die Schülerinnen und Schüler sind hier aufgefordert, das Ergebnis einer Addition aus vier vorgegebenen Antworten auszuwählen (vgl. **Abb. 3**). Ist das Ergebnis angeklickt, so kann durch Betätigung des Buttons "Auswertung" die Eingabe überprüft werden. Mit "Neu erstellen" wird per Zufallsgenerator eine neue Additionsaufgabe erstellt. Im Rahmen des Differenzierungsprozesses kann die Lehrkraft in diesem Unterrichtsabschnitt die Arbeitsweise der Schülerinnen und

Schüler gezielt beobachten. Sollten bei der Bearbeitung der Aufgaben schwächere Schülerinnen oder Schüler auf Schwierigkeiten stoßen, kann die Lehrkraft diese individuell betreuen und gemeinsam mit ihnen noch einmal die Aufgaben des ersten interaktiven Arbeitsblattes bearbeiten oder die gefundenen Rechenregeln erörtern.

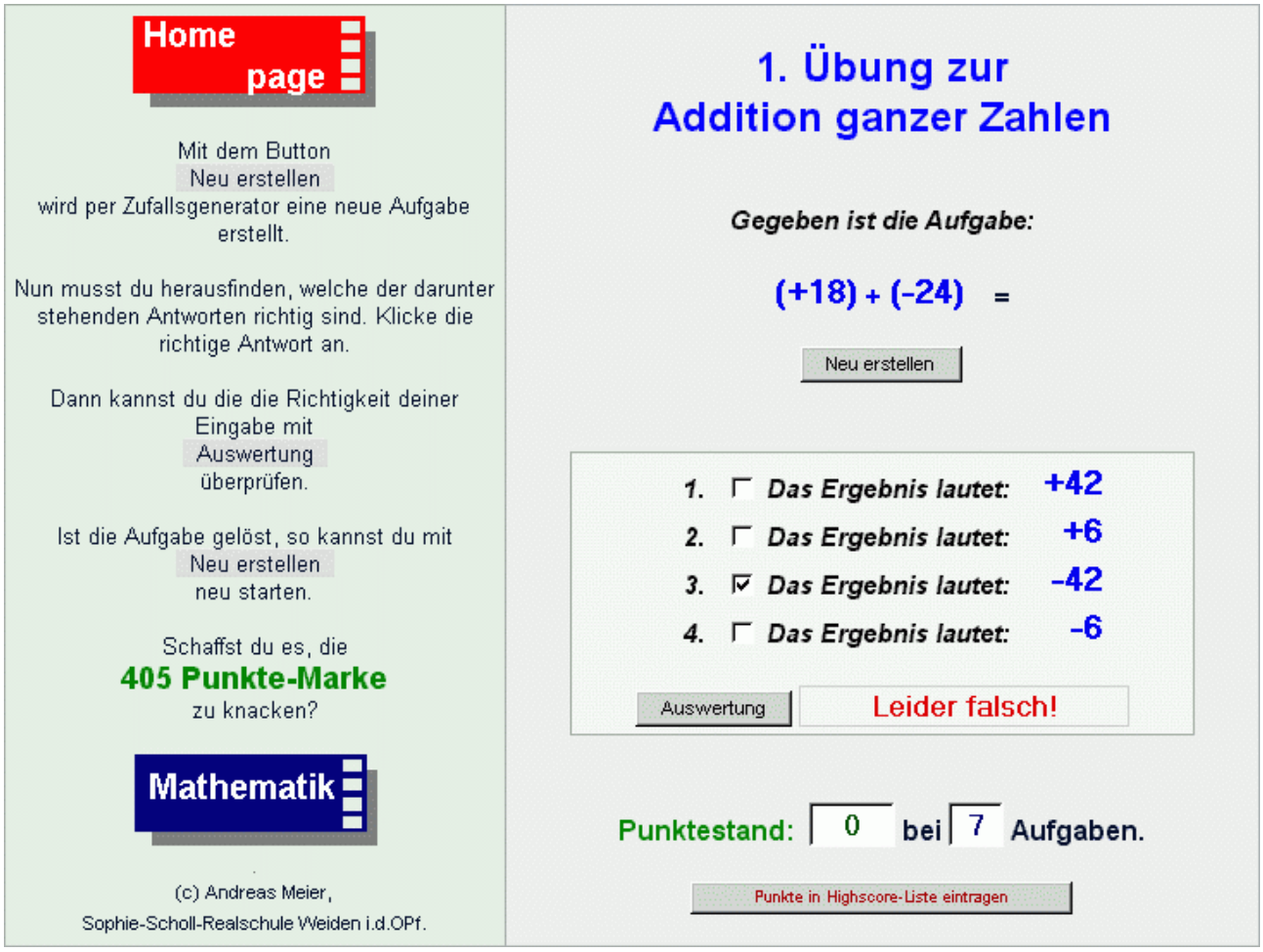


Abb. 3: http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/addganzahl.html

5.2 "Punktejagd" als motivierendes Element

Für alle anderen Schülerinnen und Schüler bietet das interaktive Arbeitsblatt "Übung zur Addition ganzer Zahlen" einen Wettbewerb, bei dem das Kind Sieger ist, das am Ende die meisten Punkte erreicht. Als besonderer Anreiz besteht dabei die Möglichkeit, die erreichten Punkte in eine Bestenliste eintragen zu lassen und sich so mit Schülerinnen und Schülern anderer Schulen und Länder zu messen.

6. Hausaufgabenstellung und Ausblick

Entsprechende Hausaufgaben finden sich in allen Schulbüchern. Sollten die in den verwendeten Arbeitsblättern enthaltenen Aufgaben nicht alle gelöst worden sein, so können auch diese als Hausaufgabe bearbeitet werden. Auf realmath.de finden sich für die nachfolgenden Unterrichtsstunden acht weitere interaktive Übungen zur Addition ganzer Zahlen. Hier kann die Lehrkraft, je nach eigener Schwerpunktsetzung, die eine oder andere Aufgabe auswählen und so die nachfolgende Übungsphase abwechslungsreich gestalten: